Mille viae ducunt homines matricum productum

Jimmy Dillies

Mots clés : Produit matriciel, itinéraire, graphe, matrice d'adjacence.

Résumé. *Comment une recherche d'itinéraires éclaire le produit matriciel.*

1. Introduction

Lorsque l'on fait des mathématiques on essaye souvent de modéliser un exemple concret au travers de règles épurées. Néanmoins, et c'est là toute l'ironie, il faut souvent un certain temps pour faire siens de nouvelles propriétés et axiomes avec lesquels on désire travailler.

Une des constructions mathématiques qui laisse l'étudiant pantois pour un laps de temps considérable est le produit matriciel. Si ce produit a, *a posteriori*, de nombreuses qualités, sa définition ressemble beaucoup à l'œuvre d'un *deus ex machina* et l'on se sent un peu démuni face à sa définition.

Bien entendu, le produit matriciel peut être introduit de manière ad hoc comme étant l'opération qui représente la composition d'applications linéaires (par exemple les transformations affines du plan, ...).

Dans cette note, nous nous proposons de définir le produit matriciel en faisant un détour par le monde des *graphes* et de leur *matrice d'adjacence*. Nous suivrons, en quelque sorte, le chemin de pensée qu'a suivi Heisenberg (1) qui réinventa l'algèbre linéaire en développant la mécanique quantique...

2. Le problème

Tout voyageur désirant se rendre d'un point A à un point B se voit souvent confronté à un dilemme : les chemins sont rarement uniques et il faut choisir sa voie.

Fig. 1 : Toutes les routes mènent à Cossé le Vivien

Imaginons le cas d'un Parisien désirant se rendre dans l'Utah. Les vols directs entre Paris et Salt Lake City ayant été annulés, il est obligé de faire escale afin de se rendre dans l'Ouest américain. Il consulte les grilles horaires de Windsor Airlines (2) et remarque que toutes les correspondances passent soit par Atlanta, soit par New-York (JFK).

Plus précisément, il y a chaque jour deux vols qui relient Paris à New-York ainsi que Paris (CDG) à Atlanta. De New-York, il n'y a qu'une connexion vers Salt Lake City, tandis qu'à partir d'Atlanta le choix est plus large : trois vols relient la capitale de l'état de Georgie à Salt Lake City.

La situation est résumée dans ce diagramme

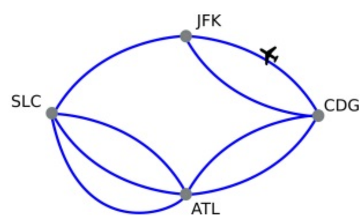

Fig. 2 : Vols reliant Paris à Salt Lake City

(1) Werner Heisenberg (1901-1976), physicien allemand, prix Nobel de physique (1932), formula la mécanique quantique sous forme de *mécanique matricielle*.
(2) C'est la compagnie fictive dont un avion est détourné dans le film *Die Hard*.

ou, de manière équivalente, dans cette table :

Tableau 1 : Résumé des vols

↱	CDG	JFK	ATL	SLC
CDG	0	2	2	0
JFK	0	0	0	1
ATL	0	0	0	3
SLC	0	0	0	0

Remarquez que de telles tables sont choses courantes. Elles sont un peu comme les tableaux que l'on trouve en bas des cartes routières, qui indiquent les distances (en temps ou en kilomètres) entre divers lieux donnés.

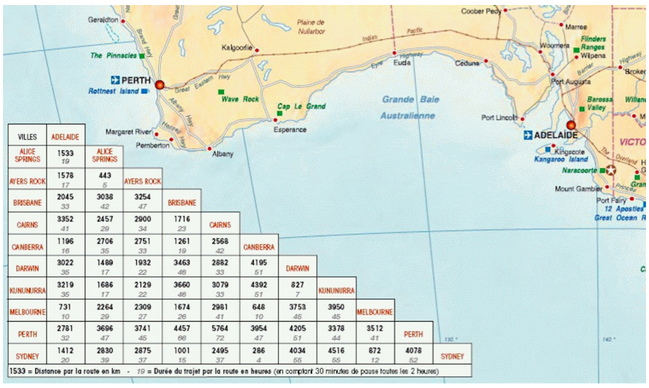

Fig. 3 : Terres australes : la table indique la distances séparant les grandes villes australiennes

Notre passager (qui a une forte inclination pour la combinatoire) se demande assez naturellement : « Combien d'itinéraires différents puis-je emprunter entre Paris et Salt Lake City ? »

La réponse est un simple exercice de combinatoire. Les itinéraires passent soit par Atlanta, soit par New-York et, dans chaque cas, on applique le principe de base du comptage : le principe de multiplication. Le nombre total d'itinéraires est donc de

$$2 \times 1 + 2 \times 3 = 8.$$

3. Graphes et Matrices

Essayons maintenant d'extraire l'essence de la section précédente. Le diagramme des vols peut se résumer à un *graphe orienté*, c'est-à-dire un ensemble de sommets et d'arcs entre ces derniers. Nous avons également pris la peine de numéroter les sommets, la numérotation est arbitraire mais nécessaire.

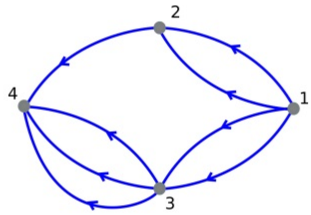

Fig. 4 : Graphe orienté associé au problème ci-dessus

La table résumant les vols peut aussi être simplifiée. En effet, cette table peut être réduite à un tableau où l'on a indiqué le nombre de chemins. C'est maintenant la position dans le tableau qui indique de quels « terminaux » l'on parle. Un tel tableau est appelé la *matrice d'adjacence* d'un graphe.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 5 : Matrice d'adjacence du graphe

Soit A une matrice d'adjacence, on dénote par A_{ij} l'entrée du tableau située à l'intersection de la rangée i et de la colonne j. En d'autres termes, A_{ij} est le nombre d'arcs entre les sommets i et j sur le graphe associé. Par exemple, dans la matrice ci-dessus, $A_{34} = 3$, c'est le nombre d'arcs entre le sommet 3 et le 4.

Introduisons une autre notation : soit $A_{ij}[L]$ le nombre de chemins en L étapes entre les sommets i et j, l'on parlera de chemin de longueur (3) L. Par exemple, $A_{ij}[1] = A_{ij}$ car la matrice d'adjacence est constituée des nombres d'arcs entre les sommets.

Le problème de la section précédente qui demande combien il y a de possibilités différentes pour aller de CDG à SLC en deux étapes peut donc se réécrire : calculez $A_{14}[2]$.

La réponse elle, est toujours la même, on décompose la réponse selon l'étape intermédiaire :

$$\begin{aligned} A_{14}[2] &= A_{11}[1] \cdot A_{14}[1] + A_{12}[1] \cdot A_{24}[1] \\ &\quad + A_{13}[1] \cdot A_{34}[1] + A_{14}[1] \cdot A_{44}[1] \\ &= 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ &= 8 \end{aligned}$$

La notation est un peu abstruse mais ce que l'on fait, c'est simplement prendre un à un les éléments

(3) Une longueur n'est pas nécessairement exprimée en mètres ou en kilomètres ; par exemple, en montagne on parlera d'un trajet de 3 heures pour atteindre un chalet.

de la première rangée, ainsi que ceux de la dernière colonne, les multiplier deux par deux, puis additionner le tout.

Tableau 2 : Touché coulé

0	2	2	0
0	0	0	1
0	0	0	3
0	0	0	0

Nous avons fait le calcul pour $A_{14}[2]$ mais rien ne nous empêche de faire de même pour tout autre chemin. On a alors un nouveau tableau, $A[2]$ dont les entrées comptent le nombre de chemins de longueur 2 entre chaque sommet. Le résultat dans ce cas-ci n'est guère intéressant, mais les propriétés de $A[2]$ le sont bien par contre !

$$A[2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fig. 6 : Chemins de longueur 2

Systématisons maintenant l'opération de comptage effectué en (1) en définissant une opération matricielle : soient A, B deux matrices carrées de dimension n, l'on définit le *produit* comme la matrice

$$C = A \cdot B,$$

de même dimension ([4]), telle que

$$\begin{aligned} C_{ij} &= A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + \dots \\ &\quad + A_{ik} \cdot B_{kj} + \dots + A_{in} \cdot B_{nj}. \end{aligned}$$

Voici un exemple. Soient A et B les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculons leur produit $C = A \cdot B$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 14 & 10 \\ -11 & -8 & -13 \\ -2 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 8 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a mis en évidence dans le calcul ci-dessus, les détails qui mènent à C_{32}.

Avec la notation multiplicative, on peut donc écrire $A[2] = A^2$. En effet, l'opération $A \to A[2]$, se comporte comme l'exponentiation : si, nous avions cherché, en place des chemins de longueur 2, des chemins de longueur 3 ou plus, nous aurions toujours pu décomposer les chemin selon leurs étapes intermédiaires :

$$A[L] = A[k] \cdot A[L-k].$$

C'est-à-dire, tout chemin de longueur L passera à la k-ième étape par un point donné et, pour chaque choix d'étape, il y aura avant un chemin de longueur k et, après un chemin de longueur $L-k$. Avec la notation multiplicative, l'on a bien $A^L = A^k \cdot A^{L-k}$, qui est la propriété caractérisant l'exponentiation !

4. Un autre exemple

Voici un second exemple. Considérons le graphe suivant :

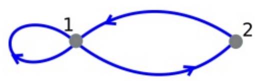

Fig. 7 : Leonardo Bonacci, portrait cubiste

Imaginons que nous désirions trouver le nombre de chemins en trois étapes qui partent et reviennent au point 1. Faisons-le de deux manières différentes.

- **À la main :**
  Écrivons (11) pour l'étape qui consiste à emprunter la boucle sise en 1, (12) pour celle qui consiste à aller de 1 à 2 puis finalement (21) pour l'étape qui consiste à revenir de 2 à 1. Tout chemin de longueur 3 peut se décomposer en séquence de « (11) » et de « (12)(21) ».
  Les voyages possibles sont (11)(11)(11), (11)(12)(21) et (12)(21)(11) et la réponse est donc 3.
- **Au moyen de matrices :**
  La matrice d'adjacence du graphe est

  $$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  On calcule rapidement

  $$F^2 = F \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

([4]) Il est aisé de voir que cette définition marche plus généralement quand le nombre de colonnes de A est égal au nombre de rangées de B, auquel cas C aurait le même nombre de rangées que A et le même nombre de colonnes que B.

et

$$F^3 = F \cdot F^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, nous lisons sur la matrice F^3 que le nombre de chemins pour aller de 1 à 1 en trois étapes est bien $\left(F^3\right)_{11} = 3$.

Remarque : nous laissons au lecteur le plaisir de vérifier qu'en fait $(F^n)_{11} = F_{n+1}$, le $(n+1)$-ième nombre de Fibonacci !

5. Et dans l'autre sens ?

Voici une problème lié au produit matriciel qui, si on l'introduit sans justification, n'est pas trivial : trouvez une matrice A telle que $A^4 = 0$ sans que A^3 soit nul.

Grâce à l'approche ci-dessus on se rend vite compte qu'il suffit de trouver un graphe orienté où tous les chemins sont de longueur 3 ou moins. Il reste à écrire la matrice d'adjacence de ce graphe et le problème est résolu !

6. Fin d'étape

Si la définition du produit matriciel au moyen des matrices d'adjacence n'est pas la panacée, elle a le mérite de justifier plusieurs propriétés de l'opération. Ainsi, distributivité du produit sur l'addition, non-commutativité du produit, etc. deviennent des résultats classiques de calcul combinatoire. Aussi, elle permet d'introduire très naturellement la notion de chaîne de Markov ([5]) ou de justifier l'emploi du produit matriciel en mécanique quantique. Bref, tous les chemins rayonnent du produit matriciel.

Jimmy Dillies enseigne à la Georgia Southern University. ✉ jdillies@georgiasouthern.edu

À Budapest © Guy Noël

([5]) Andreï Markov (1856-1920), mathématicien russe, célèbre pour ses travaux en théorie des probabilités.